الموضوع المحاضرة ~~الخامسة~~ الثانية ...

* الصفوف المولّدة و الصفوف المولّدة :

- إذا كان لدينا مجموعة $X \neq \emptyset$ و صف جزئي $H \subset 2^X$ فإن صف H : قد يشكل حلقة أو جبر - سيغما حلقة ... وقد لا يشكل أي من الصفوف المدروسة سابقاً.

- ولكن من صف H هذا يمكننا الحصول على حلقة أو سيغما حلقة أو جبر أو صف جبر أو صف مطرد أو صف ديناكي. وعند حصولنا على الصف المطلوب : سنسمي الصف الناتج فنسميه الصف المولّد من الصف H.

- فيما يلي نعتبر أن X صف غير خالي $X \neq 0$ و 2^X صف كل المجموعات في X.

ونرمز بـ Λ لمجموعة أدلته (قد تكون منتهية أو غير منتهية).

مبرهنة:

تقاطع أية أسرة من الحلقات على X هو من جديد حلقة على X (وكذلك تقاطع أية أسرة من الجبور).

الإثبات:

لتكن $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ أسرة من الحلقات على X.

ولنثبت أن : $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ حلقة على X.

R حلقة $\Leftrightarrow$ $A \cup B , A \setminus B \in R$

ولتكن $A, B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ هذا يعني أن $A, B \in R_\lambda$ من أجل كل $\lambda \in \Lambda$

وبما أن R_λ حلقة بالفرض فإن: $A \cup B \in R_\lambda$ وكذلك $A, B \in R_\lambda$ من أجل $\lambda \in \Lambda$ لذلك يكون:

$$A \cup B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \quad , \quad A \setminus B \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$$

وهذا يعني أن $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ حلقة على X.

AlAziz

الموضوع

الآن: لتكن $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ أسرة الجبور على X.
بحسب ما تقدم فإن: $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ حلقة على X.
وبما أن A_λ جبر فإن:
$X \in A_\lambda$ من أجل كل $\lambda\in\Lambda$ ~~$X\in A_\lambda$~~
وبالتالي $X \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

أي أن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ جبر على X.
وبشكل مشابه يمكن اثبات ما يلي:

مبرهنة 2:

1) تقاطع أية أسرة من σ - الحلقات على X هو σ - حلقة على X.
2) تقاطع أية أسرة و σ - الجبور على X هو σ - جبر على X.
3) تقاطع أية أسرة من صفوف دنكين على X هو دنكين على X.
4) تقاطع أية أسرة من الصفوف المطردة هو صف مطرد.
5) تقاطع نصفي حلقة على X ليس بالضرورة نصف حلقة على X (نفس الشيء بالنسبة لأنصاف الجبور).

ملاحظة:
من أجل كل صف $H \subset 2^X$ يوجد على الأقل حلقة أو σ - حلقة أو جبر أو σ - جبر يحوي هذا الصف H فمثلاً: 2^X.
ونبحث عن أصغر حلقة (أو σ - حلقة أو σ - جبر يحوي الصف H).
هذا الصف الأصغر نسميه الحلقة المولّدة بالصف H أو σ - الجبر المولّد بالصف H). ونسمي H الصف المولّد.

AlAziz

الموضوع

الحلقة الأصغرية التي تحوي الصف H هي تقاطع جميع الحلقات التي تحوي الصف H.

نفس الكلام على الجبر و σـ الحلقة و σـ الجبر و صف دنكين و الصف المطرد.

تعريف: لتكن X مجموعة غير خالية و $H \subset 2^X$ عندئذٍ:

1) نضع: $R(H) = \bigcap_{\substack{\text{حلقة } R \\ H \subset R}} R = \bigcap_R \{R : H \subset R \text{ , حلقة } R\}$

و نسمي $R(H)$ الحلقة المولّدة بالصف H.

و نسمي H الصف المولّد للحلقة $R(H)$.

2) $\mathcal{A}(H) = \bigcap_{\substack{\text{جبر } A \\ H \subset A}} A$ و نسميه الجبر المولّد بالصف H و نسمي H الصف المولّد.

3) نضع $R_\sigma(H) = \bigcap_{\substack{\text{حلقة } \sigma R_\sigma \\ H \subset R_\sigma}} R_\sigma$ و نسميه σـ الحلقة المولّدة بالصف H و نسمي H الصف المولّد.

4) نضع $f_\sigma(H) = \bigcap_{\substack{\text{جبر } \sigma f_\sigma \\ H \subset f_\sigma}} f_\sigma$ نسميه σـ الجبر المولّد بالصف H و نسمي H الصف المولّد.

5) نضع $D(H) = \bigcap_{\substack{\text{صف دنكين } D \\ H \subset D}} D$ و نسميه صف دنكين المولّد بالصف H و نسمي H الصف المولّد.

6) نضع $M(H) = \bigcap_{\substack{\text{صف مطرد } M \\ H \subset M}} M$ و نسميه الصف المطرد المولّد بالصف H. و نسمي H الصف المولّد.

ملاحظة:

1) إذا كان $H = R$ حلقة على X فإن: $R(R) = R$

2) إذا كان $H = A$ جبر فإن: $A(A) = A$

نفس الأمر بالنسبة لبقية الصفوف.

ملاحظة

يكون دوماً $H \subset R(H)$ و $H \subset \mathcal{A}(H)$ ، $H \subset R_\sigma(H)$ ، $H \subset f_\sigma(H)$

AlAziz

الموضوع

مبرهنة 3: ليكن $H_1, H_2 \subset 2^X$ عندئذٍ:

1) - إذا كان $H_1 \subset H_2 \subset R(H_1)$ فيكون $R(H_1) = R(H_2)$

2) - إذا كان $H_1 \subset H_2 \subset A(H_1)$ فيكون ~~$R(H_1) = R(H_2)$~~

$A(H_1) = A(H_2)$

3) - " " $H_1 \subset H_2 \subset R_\sigma(H_1)$ = $R_\sigma(H_1) = R_\sigma(H_2)$

4) - " " $H_1 \subset H_2 \subset \mathcal{F}_\sigma(H_1)$ = $\mathcal{F}_\sigma(H_1) = \mathcal{F}_\sigma(H_2)$

5) - " " $H_1 \subset H_2 \subset D(H_1)$ = $D(H_1) = D(H_2)$

6) - " " $H_1 \subset H_2 \subset M(H_1)$ = $M(H_1) = M(H_2)$

مبرهنة 4: لتكن $X \neq \emptyset$ و $H \subset 2^X$ عندئذٍ:

1) - $D(H) = \mathcal{F}_\sigma(H)$ ~~$D(H) = \mathcal{F}$~~

2) - إذا كان $H = R$ حلقة على X فيكون $M(R) = R_\sigma(R)$

3) - إذا كان $H = A$ جبر على X فيكون $M(A) = \mathcal{F}_\sigma(A)$

مبرهنة 5: إذا كانت S نصف حلقة على X فإن الحلقة المولّدة بـ S لها الشكل:

$$R(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N}, A_i \in S \right\}$$

(أي أن كل عنصر من $R(S)$ هو اجتماع لعدد منتهٍ من مجموعات S ومنفصلة مثنى مثنى).

وهو المطلوب إثباته.

ملاحظة:

يمكن لصفين مختلفين H_1 و H_2 أن يولّدا نفس الحلقة أو نفس الجبر أو σ - حلقة أو σ - الجبر.

مثلاً: لو أخذنا $H_1 = \{\emptyset\}$ و $H_2 = \{X\}$ لوجدنا أن $H_1 \neq H_2$ بينما:

$\mathcal{F}_\sigma(H_1) = \{\emptyset, X\}$

$\mathcal{F}_\sigma(H_2) = \{\emptyset, X\}$

AlAziz

الموضوع

أي أن $\mathcal{F}_\sigma(H_1) = \mathcal{F}_\sigma(H_2)$ بالرغم أن $H_1 \neq H_2$

أمثلة :

★ مثال 1 : لتكن المجموعة $X = [0,1]$ و الصفوف :

$H_1 = \{[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]\} \subset 2^X$

$H_3 = \{[0, \frac{2}{3}], [\frac{1}{3}, 1]\} \subset 2^X$

$H_2 = \{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\} \subset 2^X$

أوجد $\mathcal{F}_\sigma(H_1)$ و $\mathcal{F}_\sigma(H_2)$ و $\mathcal{F}_\sigma(H_3)$.

الحل :

$\mathcal{F}_\sigma(H_1) = \{\emptyset, [0,1], [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], [0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{2}, 1]\}$

$\mathcal{F}_\sigma(H_2) = \{\emptyset, [0,1], [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1], [0, \frac{1}{2}[,$

$, [\frac{1}{2}, 1],]\frac{1}{2}, 1], ,$

$, [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1], \{\frac{1}{2}\}\}$

$\mathcal{F}_\sigma(H_3) = \{\emptyset, [0,1], [0, \frac{2}{3}], [\frac{1}{3}, 1],$

$, [0, \frac{1}{3}[,]\frac{2}{3}, 1], [0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, 1],$

$, [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]\}$

★★ مثال 2 : لتكن المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$

و الصف $H = \{a\}$

أوجد $R(H)$ و $R_\sigma(H)$ و $\mathcal{F}_\sigma(H)$, $D(H)$

جبر سيغما — مفكك

الحل :

$R(H) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$R_\sigma(H) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$\mathcal{F}_\sigma(H) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c, d\}\}$

$D(H) = \mathcal{F}_\sigma(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, X\}$

AlAziz

الموضوع

هام

تمرين:

لتكن X مجموعة غير منتهية وغير محدودة وليكن H صف المجموعات الجزئية في X، التي تكون محدودة أو متممتها محدودة:

$H = \{ A : A \subset X$ ؛ A محدودة أو A^c محدودة $\} \subset 2^X$

- أثبت أن H يشكل س-جبر على X.

★★ الحل:

بداية نثبت أن H يشكل س-حلقة X.

★ 1)- لتكن $A, B \in H$ هذا يعني أن A محدودة أو A^c محدودة و B محدودة أو B^c محدودة.

ونثبت أن $A \setminus B \in H$ ؟

فإذا كانت A ، B محدودتان فإن $(A \setminus B)$ مجموعة محدودة وبالتالي $(A \setminus B) \in H$.

وإذا كانت A^c ، B^c محدودة فيكون لدينا:

$$A^c \setminus B^c = A^c \cap B = B \cap A^c = B \setminus A \in H$$

2)- لتكن $A_1, A_2, A_3, \ldots \in H$ هذا يعني أن A_n محدود أو متممتها A_n^c محدودة حيث $n = 1, 2, \ldots$

ولنثبت أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in H$ ؟

فإذا كانت كل المجموعات A_n محدودة فإن $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ مجموعة محدودة وبالتالي $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in H$

- أما إذا كانت إحدى المجموعات A_n (على الأقل) غير محدودة لنسميها A_{n_0} فتكون متممتها $A_{n_0}^c$ محدودة.

وبما أن:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset A_{n_0}^c$$

فينتج أن $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$ مجموعة محدودة:

وبالتالي: $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in H$

H يشكل س-حلقة على X.

وبما أن $\emptyset \in H$ فيكون:

ALAZIZ